



DINAMIK SISTEMALARNING BOSHLANG'ICH TUSHUNCHALARI (QO'ZG'ALMAS NUQTA VA SIKLIK NUQTALAR) VA ULARNI MISOLLARDAGI TAHLILLARI

<https://doi.org/10.5281/zenodo.19650376>

Solayeva Mehribon Norimonovna

Jahon iqtisodiyoti va diplomatiya universiteti,

“Tizimli tahlil va matematik modellashtirish kafedra katta o'qituvchisi.”

m.solayeva@uwed.uz.

Annotatsiya: *Ushbu maqolada dinamik sistemalarning boshlang'ich tushunchalaridan bo'lgan qo'zg'almas nuqta topish, davriy (siklik) nuqtalar topish va ularning orbitasining holatlari tahlili misollar yordamida ko'rib chiqiladi. Bundan tashqari vaqt o'tishi bilan qo'zg'almas nuqta tushunchasi va unga oid bir nechta misollar ko'rib chiqiladi.*

Kalit so'zlar: *qo'zg'almas nuqta, davriy nuqtalar, vaqt o'tishi bilan qo'zg'almas nuqta.*

Аннотация: *В данной статье на примерах рассматриваются основные понятия динамических систем, такие как поиск неподвижных точек, нахождение периодических (циклических) точек и анализ состояния их орбит. Кроме того, рассматривается понятие асимптотически неподвижной точки (неподвижной точки с течением времени) и приводятся соответствующие примеры.*

Ключевые слова: *неподвижная точка, периодические точки, асимптотически неподвижная точка.*

Abstract: *This article examines the fundamental concepts of dynamical systems, including the identification of fixed points, periodic (cyclic) points, and the analysis of their orbital states through illustrative examples. Furthermore, the concept of eventually fixed points (fixed points over time) is explored, supported by several related examples.*

Keywords: *fixed point, periodic points, eventually fixed point.*

Orbitaning yana bir muhim turi — bu **davriy orbita** yoki **sikl** (cycle). Agar biror $n > 0$ uchun $F^n(x_0) = x_0$ sharti bajarilsa, x_0 nuqtasi davriy nuqta deb ataladi. Bunday n sonlarining eng kichigi orbitaning **tub davri** (prime period) deb yuritiladi. Shuni ta'kidlash kerakki, agar x_0 nuqtasi n tub davr bilan davriy bo'lsa, u holda uning orbitasi shunchaki takrorlanuvchi sonlar ketma-ketligidan iborat bo'ladi:



$$x_0, F(x_0), \dots, F^{n-1}(x_0), x_0, F(x_0), \dots, F^{n-1}(x_0), \dots$$

Masalan, $F(x) = x^2 - 1$ funksiyasi uchun 0 nuqtasi tub davri 2 ga teng bo'lgan siklda yotadi, chunki $F(0) = -1$ va $F(-1) = 0$. Shunday qilib, 0ning orbitasi oddiygina:

$$0, -1, 0, -1, 0, -1, \dots$$

Shuningdek, 0 va -1 nuqtalari **2-sikl** hosil qiladi deb ham aytamiz. Xuddi shunday, $F(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 1$ funksiyasi uchun 0 nuqtasi tub davri 3 bo'lgan davriy orbitada yoki 3-siklida yotadi, chunki $F(0) = 1$, $F(1) = 2$ va $F(2) = 0$ Shunday qilib, orbita quyidagicha:

$$0, 1, 2, 0, 1, 2, \dots$$

Yuqorida tahlil qilingan ikkinchi, uchunchi davriy orbitalar birmuncha oson ko'ringani bilan, ammo davriy orbitalarni topish masalasi ancha qiyin masalalardan biri hisoblanadi, chunki davriy orbitalarni topish uchun berilgan $F(x)$ funksiya uchun $F^n(x) = x$ tenglama yechimini topish lozimdir. Masalan yuqorida keltirgan $F(x) = x^2 - 1$ funksiyasi uchun 0 nuqtasi tub davri 2 ga teng bo'lgan siklda yotishi haqidagi masalani tenglama tuzish orqali isbotlab ko'rsatamiz.

Eng avval berilgan $F(x) = x^2 - 1$ funksiyani ikki marta itaratsiya qildiramiz.

$$F^2(x) = F(F(x)) = (x^2 - 1)^2 - 1$$

$$F^2(x) = x^4 - 2x^2 + 1 - 1 = x^4 - 2x^2$$

Endi topilgan funksiyani yuqorida ta'kidlaganimiz kabi x ga tenglashtirib tenglama yechimini topamiz.

$$x^4 - 2x^2 = x$$

$$x^4 - 2x^2 - x = 0$$

$$x(x^3 - 2x - 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

Yechim hosil bo'ladi. Bundan tashqari berilgan tenglamaning ikkinchi kavsini nolga tenglashtirib yechim topish orqali $x_2 = -1$, $x_3 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, $x_4 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ yechimlar kelib chiqadi va yuqoridagilardan berilgan funksiyaning 4 ta tub davri 2 ga teng bo'lgan nuqtalari mavjud ekan. Endi bu nuqtalarning orbitalarini ko'rib chiqamiz.



$$x_1 = 0 \Rightarrow 0, -1, 0, -1, \dots$$

$$x_2 = -1 \Rightarrow -1, 0, -1, 0, \dots$$

$$x_3 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \dots$$

$$x_4 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \dots$$

Ushbu orbitalardan ko'rinadiki x_1 va x_2 nuqtalar 2 davriy nuqtalar ekan va x_3 va x_4 nuqtalar esa qo'zg'almas nuqtalar bo'lar ekan.

Yuqoridagi ta'kidlab o'tganimizdek davriy nuqtalarni aniq topish aslida juda qiyin. Masalan, berilgan funksiya oddiy kvadratik funksiya bo'lsin va u funksiya uchun 5-davrlilik tsikllarni topish uchun biz quyidagi tenglamani yechishimiz kerak bo'ladi:

$$F^5(x) - x = 0$$

Bu $2^5 = 32$ darajali ko'phadli tenglamadir. Bunday yuqori darajali ko'phadli tenglamalarni odatda aniq yechishning imkoni yo'q. Umumiyroq aytganda, ushbu funksiya uchun n -davrlilik tsikllarni topish uchun 2^n darajali ko'phadli tenglamani yechish talab etiladi, bu esa yaqqol imkonsiz vazifadir.

Shuni ta'kidlash kerakki, agar x_0 nuqta k tub davrga ega bo'lsa, u holda x_0 nuqta F^{2k} uchun ham qo'zg'almas nuqta bo'ladi. Haqiqatan ham, $F^{2k}(x_0) = F^k(F^k(x_0)) = F^k(x_0) = x_0$. Shunga o'xshash, x_0 nuqta F^{nk} uchun ham qo'zg'almasdir, shuning uchun biz ixtiyoriy musbat butun n soni uchun x_0 nuqta nk davrga ega deb aytamiz. Biz **tub davr** (prime period) atamasini $n=1$ bo'lgan holat uchun saqlab qolamiz.

Shuningdek, agar x_0 nuqta k davrlilik davriy orbitada yotsa, u holda ushbu orbitadagi barcha nuqtalar ham k davrga ega bo'ladi. Haqiqatan ham, x_1 ning orbitasi quyidagicha bo'lib:

$$x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_0, x_1, \dots$$

u k davrga ega.

Agar x_0 nuqtaning o'zi qo'zg'almas yoki davriy bo'lmasa-yu, lekin uning orbitasidagi qandaydir nuqta qo'zg'almas yoki davriy bo'lsa, u holda x_0 nuqta **vaqt o'tishi bilan qo'zg'almas** (eventually fixed) yoki **vaqt o'tishi bilan davriy** (eventually periodic) deb ataladi. Masalan, $F(x) = x^2$ funksiyasi uchun -1 nuqta vaqt o'tishi bilan qo'zg'almasdir, chunki $F(-1) = 1$ va u qo'zg'almas nuqtadir. Shunga o'xshash, $F(x) = x^2 - 1$ funksiyasi uchun 1 nuqta vaqt o'tishi bilan davriydir, chunki $F(1) = 0$ va



u 2-davrlı tsiklda yotadi. $\sqrt{2}$ nuqtasi ham ushbu funksiya uchun vaqt o'tishi bilan davriydir, chunki uning orbitasi:

$$\sqrt{2}, 1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, \dots$$

Misol: $A(x) = |x|$ funksiyasi uchun vaqt o'tishi bilan qo'zg'almas bo'ladigan (eventually fixed) nuqtalar qaysilar?

Yechish: berilgan funksiyaning argumenti musbat bo'lgan holda barcha musbat sonlar uning qo'zg'almas nuqtalari bo'ladi, ammo manfiy bo'lgan holda avval modul orqali argument musbat bo'ladi va keyin barcha sonlar qo'zg'almas nuqta bo'ladi.

Bundan ko'rinadiki $[0, \infty)$ oraliqdagi barcha sonlar berilgan funksiyaning qo'zg'almas nuqtalari va $(-\infty, 0)$ oraliqdagi barcha nuqtalar berilgan funksiyaning vaqt o'tishi bilan qo'zg'almas nuqtalari deyiladi.

Odatdagi dinamik sistemalarda ko'p orbitalar qo'zg'almas yoki davriy emas. Masalan, $T(x) = 2x$ chiziqli funksiyasi uchun faqat 0 nuqtasi qo'zg'almas nuqtadir. T ning qolgan barcha orbitalari iteratsiya natijasida kattalashib boradi (absolyut qiymat bo'yicha), chunki $T^n(x_0) = 2^n x_0$. Haqiqatan ham, agar $x_0 \neq 0$ bo'lsa, n cheksizlikka intilganda $|T^n(x_0)|$ cheksizlikka intiladi. Biz buni quyidagicha belgilaymiz:

$$|T^n(x_0)| \rightarrow \infty$$

$L(x) = \frac{1}{2}x$ chiziqli funksiyasi uchun vaziyat aksinchadir. L uchun faqat 0 qo'zg'almas nuqtadir, ammo ixtiyoriy $x_0 \neq 0$ uchun:

$$L^n(x_0) = \frac{x_0}{2^n}$$

$\{\frac{1}{2^n}\}$ ketma-ketligi nolga intilgani sababli, bizda quyidagicha natija bo'ladi:

$$L^n(x_0) \rightarrow 0$$

Biz x_0 ning orbitasi 0 qo'zg'almas nuqtasiga yaqinlashadi deb aytamiz.

Boshqa bir misol sifatida kvadratga oshirish funksiyasini ko'rib chiqamiz: $F(x) = x^2$. Agar $|x_0| < 1$ bo'lsa, $F^n(x_0) \rightarrow 0$ ekanligini tekshirish oson. Masalan, agar $x_0 = 0.1$ bo'lsa, u holda x_0 ning orbitasi quyidagicha bo'ladi:

$$0.1, 0.01, 0.0001, \dots, 10^{-2^n}, \dots$$

va u yaqqol nolga intiladi.



Misol: Ushbu $F(x) = |x - 2|$ funksiyani F uchun qo'zg'almas nuqtalarini, x_0 toq butun son bo'lsa, x_0 ning orbitasi haqida nima deyish mumkin yoki x_0 juft bo'lsa, orbitada nima sodir bo'lishini aniqlang.

Yechish: Ushbu berilgan funksiyaning qo'zg'almas nuqtasini topish uchun avval ta'kidlab o'tganimizdek $F(x) = x$ tenglama yechimini topamiz.

Bundan esa $|x - 2| = x$ tenglama hosil bo'ladi. Endi tenglama yechimini topish uchun argumentning ikkita holini ko'rib chiqamiz.

$$x \geq 2 \Rightarrow x - 2 = x \Rightarrow \emptyset$$

$$x \leq 2 \Rightarrow -x + 2 = x \Rightarrow x = 1$$

Bo'lib, bundan esa berilgan funksiyaning qo'zg'almas nuqtasi $x = 1$ ga teng ekan.

Endi boshlang'ich x_0 nuqta toq butun son bo'lgan holni tahlil qiladigan bo'lsak, ya'ni $x_0 = 2k + 1$ ga teng bo'lsin. U holda orbitaning ikkinchi qiymati ham toq son bo'ladi va $x_1 = 2k - 1$ ga teng bo'ladi. Huddi shunday itaratsiyani davom ettirsak u holda ohir oqibat orbita faqat 1 dan iborat bo'lib qoladi, ya'ni

$$2k + 1, 2k - 1, 2k - 3, \dots, 1, 1, 1, \dots$$

Bundan esa ixtiyoriy toq butun sonning berilgan funksiyadagi orbitasidagi holati vaqt o'tishi bilan qo'zg'almas nuqtasi bo'lar ekan.

Endi boshlang'ich x_0 nuqta juft butun son bo'lgan holni tahlil qilaylik. $x_0 = 2k$ ga teng bo'lsin. U holda orbitaning ikkinchi qiymati ham juft son bo'ladi va $x_1 = 2k - 2$ ga teng bo'ladi. Huddi shunday itaratsiyani davom ettirsak u holda ohir oqibat orbitada 0 va 2 lardan iborat 2 davriy qiymatlar hosil bo'ladi. Ya'ni

$$2k, 2k - 2, 2k - 4, \dots, 0, 2, 0, 2, \dots$$

Misol: Ushbu $D(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x < 1/2 \\ 2x - 1 & 1/2 \leq x < 1 \end{cases}$ funksiya berilgan bo'lsin. **Quyidagi**

har bir boshlang'ich qiymat (seed) uchun D ostida hosil bo'lgan orbitaning xulq-atvorini aniqlang.

$$a. x_0 = 0.3, \quad b. x_0 = 0.7, \quad c. x_0 = \frac{1}{8} \quad d. x_0 = \frac{1}{16}$$

Yechish: Yuqorida berilgan funksiya ikkilantirish funksiyasi deyiladi. Endi ushbu funksiya ostidagi berilgan boshlang'ich nuqtalardagi funksiyaning orbitasini ko'rib chiqamiz.

$$x_0 = 0,3 \Rightarrow D(0,3) = 0,6, \quad D(0,6) = 0,2, \quad D(0,2) = 0,4, \quad D(0,4) = 0,8,$$

$$D(0,8) = 0,6, \quad D(0,6) = 0,2, \quad D(0,2) = 0,4, \quad D(0,4) = 0,8, \quad D(0,8) = 0,6\dots$$

Ekanligidan, berilgan nuqtaning orbitasi vaqt o'tishi bilan qo'zg'almas nuqta bo'lar ekan va bundan tashqari orbita 4 davriy siklga ega bo'lar ekan.



$$x_0 = 0,7 \Rightarrow D(0,7) = 0,4, D(0,4) = 0,8, D(0,8) = 0,6, D(0,6) = 0,2,$$

$$D(0,2) = 0,4, D(0,4) = 0,8, D(0,8) = 0,6, D(0,6) = 0,2,$$

$$D(0,2) = 0,4, D(0,4) = 0,8, D(0,8) = 0,6...$$

Bo'lishi kelib chiqadi va huddi yuqoridagi kabi bu boshlang'ich nuqta ham vaqt o'tishi bilan 4 davriy siklga ega nuqta bo'lar ekan.

Endi $x_0 = \frac{1}{8}$ va $x_0 = \frac{1}{16}$ boshlang'ich nuqtalarning orbitasini ko'rib chiqamiz.

$$x_0 = \frac{1}{16} \Rightarrow D\left(\frac{1}{16}\right) = \frac{1}{8}, D\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{4}, D\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2},$$

$$D\left(\frac{1}{2}\right) = 0, D(0) = 0, D(0) = 0, \dots$$

Ekanligidan berilgan ikkita boshlang'ich nuqtalar vaqt o'tishi bilan qo'zg'almas nuqta bo'lar ekan.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

- 1) Devaney, Robert L., A first course in chaotic dynamical systems: theory and experiment 1992
- 2) Rozikov U. A., Solaeva M.N., Behavior of trajectories of a quadratic operator splitted to uncountable linear operators. *{\it Lobachevskii Journal of Mathematics.}* 2023, Vol. 44, No. 7, p. 2910-2915.