



MATRITSANING XOS SON VA XOS VEKTORINI TOPISH METODLARI VA ALGORITMLARI

<https://doi.org/10.5281/zenodo.18247523>

Avezova Durdona Ozatovna

*Xorazm viloyati Urganch shahar 28- son umumiy o'rtta ta'lim maktabining
matematika fani o'qituvchisi*

Osiyo xalqaro universiteti ijtimoiy fanlar va texnika fakulteti magistranti

Ilmiy rahbar: Rayimov Doniyor G'afurovich

Osiyo xalqaro universiteti Umumtexnik fanlar kafedra dotsenti, PhD

Annotatsiya: Ushbu maqolada matritsaning xos son va xos vektor tushunchalari, ularni aniqlashning nazariy asoslari hamda amaliy hisoblash metodlari keng yoritilgan. Xos sonlarni topishning klassik determinantga asoslangan usullari bilan bir qatorda, katta o'lchamli matritsalar uchun samarali bo'lgan iteratsion algoritmlar, jumladan daraja usuli va QR-algoritmning mohiyati tahlil qilingan. Shuningdek, xos sonlarning karraligi, spektral radius, diagonalizatsiya shakli kabi tushunchalar orqali mavzuning chuqur matematik mazmuni ochib berilgan. Maqolada xos son va xos vektorlarning differensial tenglamalar, dinamik tizimlar, mexanik modellar, iqtisodiy tahlil hamda sun'iy intellekt sohalaridagi amaliy qo'llanilishiga alohida e'tibor qaratilgan. Tadqiqot natijalari chiziqli algebra fanini o'rganayotgan talabalar va amaliy masalalar bilan shug'ullanuvchi mutaxassislar uchun foydali bo'lishi mumkin.

Kalit so'zlar: matritsa, xos son, xos vektor, xarakteristik tenglama, determinant, iteratsion metodlar, daraja usuli, QR-algoritm, spektral radius, diagonalizatsiya, Jordan normal shakli.

KIRISH

Zamonaviy matematikaning asosiy yo'nalishlaridan biri hisoblangan chiziqli algebra ko'plab fanlar va amaliy sohalar uchun nazariy poydevor vazifasini bajaradi. Ayniqsa, matritsalar va ular bilan bog'liq tushunchalar murakkab tizimlarni tahlil qilishda, hisoblash jarayonlarini soddalashtirishda hamda matematik modellarni qurishda muhim ahamiyat kasb etadi. Matritsalar yordamida fizik jarayonlar, iqtisodiy

ko'rsatkichlar, texnik tizimlar va axborot oqimlari yagona matematik model doirasida ifodalanadi.

Matritsaning xos sonlari va xos vektorlari chiziqli o'zgartirishlarning ichki tuzilishini aniqlashda asosiy tushunchalar hisoblanadi. Ular orqali matritsaning fazodagi vektorlarga ta'siri, ya'ni qaysi yo'nalishlarda o'zgarish sodir bo'lmasligi yoki faqatgina miqdor jihatdan o'zgarishi aniqlanadi. Xos sonlar tizimning barqarorligi, tebranish



chastotalari, o'sish yoki so'nish tezligini belgilovchi muhim parametrlar sifatida namoyon bo'ladi.

Bugungi kunda xos son va xos vektorlar nazariyasi nafaqat sof matematika doirasida, balki muhandislik, mexanika, elektrotexnika, iqtisodiyot, statistika hamda sun'iy intellekt sohalarida ham keng qo'llanilmoqda. Masalan, differensial tenglamalar sistemalarini yechishda, mexanik tizimlarning barqarorligini baholashda, katta hajmdagi ma'lumotlarni qayta ishlashda va asosiy komponentlar tahlilida aynan xos sonlarga tayangan holda xulosalar chiqariladi. Bu esa mazkur mavzuning amaliy ahamiyatini yanada oshiradi.

Shu bilan birga, matritsaning xos son va xos vektorlarini topish masalasi hisoblash nuqtai nazaridan murakkab bo'lishi mumkin. Kichik o'lchamli matritsalar uchun klassik algebraik usullar samarali bo'lsa-da, katta o'lchamli va murakkab tuzilmali matritsalar uchun maxsus algoritmlar va iteratsion metodlarga ehtiyoj tug'iladi. Zamonaviy hisoblash texnologiyalari rivoji bu jarayonlarni avtomatlashtirish va tezlashtirish imkonini bermiqda.

ASOSIY QISM

Xos son va xos vektor tushunchasi. Kvadrat matritsa $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ berilgan bo'lsin. Agar mavjud bo'lsa nolga teng bo'lmagan vektor $x \neq 0$ va skalyar λ uchun $Ax = \lambda x$ tenglik bajarilsa, λ — matritsaning xos soni, x esa unga mos xos vektor deb ataladi.

Xos vektor va xos sonlar matritsaning geometrik va algebraik xususiyatlarini ifodalaydi. Geometrik nuqtai nazardan, xos vektor matritsa ta'sirida o'z yo'nalishini saqlab qoladi, faqat uzunligi λ koeffitsienti orqali o'zgaradi.

Algebraik jihatdan esa xos sonlar xarakteristik tenglamaning ildizlari bo'lib, matritsaning barqarorligi va diagonal ko'rinishga keltirilish imkoniyatini belgilaydi.

Xarakteristik tenglama va determinant usuli. Xos sonlarni aniqlashning asosiy usuli xarakteristik tenglama tuzishdan iborat:

$$\det(A - \lambda E) = 0,$$

bu yerda E — birlik matritsa.

Hosil bo'lgan polinom tenglamaning $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ildizlari matritsaning barcha xos sonlarini beradi. Bu usul kichik o'lchamli matritsalar uchun samarali bo'lsa-da, katta o'lchamli matritsalar uchun hisoblash murakkabligi oshib boradi. Bu metod kichik o'lchamli ($2 \times 2, 3 \times 3$) matritsalar uchun juda qulay.

Misol uchun: $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

xarakteristik tenglama:

$$\det = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 1 \\ 2 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = (4 - \lambda)(3 - \lambda) - 2 = \lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$$

Ildizlar: $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 2$. Shunday qilib, matritsaning xos sonlari 5 va 2 ga teng.

Xos vektorlarni topish algoritmi.

Xos sonlar aniqlangach, ularga mos xos vektorlarni topish kerak bo'ladi. Har bir aniqlangan xos son λ_i uchun xos vektor x_i quyidagi bir jinsli tenglamalar



sistemasidan topiladi:

$$(A - \lambda_i E)x_i = 0.$$

Bu sistema Gauss usuli, chiziqli tenglamalarni yechish algoritmlari yoki MATLAB, Python kabi dasturlash muhitlarida avtomatik yechim topish orqali hal qilinadi.

Misol: 2×2 matritsa uchun $\lambda_1 = 5$

$$(A - 5E)x = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} x = 0$$

Natijada olingan nolga teng bo'lmagan yechimlar mos xos vektorlar to'plamini hosil qiladi. Xos vektorlar fazosining o'lchami xos sonning algebraik va geometrik karraligiga bog'liq bo'ladi.

Iteratsion metodlar. Katta o'lchamli matritsalar uchun determinant usuli amaliy emas. Shu sababli **iteratsion metodlar** qo'llaniladi. Eng mashhurlari: Daraja usuli (Power Method) eng katta modulga ega bo'lgan xos sonni aniqlashda ishlatiladi.

Boshlang'ich vektor tanlanib, u ketma-ket matritsaga ko'paytiriladi va normallashtiriladi. Iteratsiyalar soni ortishi bilan vektor dominant xos vektorga yaqinlashadi. Invers daraja usuli esa eng kichik modulga ega bo'lgan xos sonlarni aniqlash imkonini beradi. Bu usulda matritsaning teskari ko'rinishidan foydalaniladi.

QR-algoritm. QR-algoritm zamonaviy hisoblash matematikasida eng samarali usullardan biridir. Bu algoritmda matritsa QR-ko'rinishga ajratiladi:

$$A = QR,$$

bu yerda Q — ortogonal, R — yuqori uchburchak matritsa.

Keyingi bosqichda $A_1 = RQ$

ko'rinishidagi yangi matritsa tuziladi.

Jarayon iteratsion tarzda davom ettiriladi:

$$A_k = R_k Q_k$$

Iteratsiyadan so'ng A_k deyarli diagonal matritsaga yaqinlashadi va uning diagonal elementlari xos sonlarga mos keladi. Iteratsiyalar davomida matritsa deyarli diagonal ko'rinishga keladi va diagonal elementlar xos sonlarga mos bo'ladi. QR-algoritm barcha xos sonlarni aniqlash imkonini beradi va katta o'lchamli hisoblashlarda keng qo'llaniladi.

Xos son va xos vektorlarning amaliy qo'llanilishi quyidagilar bilan harakterlanadi:

➤ **Differensial tenglamalar sistemasi** xos sonlar tizimning barqarorlik sharoitini aniqlashga yordam beradi.

➤ **Mexanik tizimlar** tebranuvchi jismlarning tebanish chastotalarini aniqlashda.

➤ **Iqtisodiy modellarda** muvozanat nuqtalarini baholash va rivojlanish trendlarini tahlil qilishda.

➤ **Sun'iy intellekt va statistika** ma'lumotlarni siqish va asosiy komponentlar tahlilida (PCA) xos vektorlar ishlatiladi.

➤ **Graf nazariyasi va tarmoqlar** markov zanjirlari va tarmoq tahlilida xos sonlar muhim rol o'ynaydi.

Shu tarzda, xos son va xos vektorlarni topish nafaqat nazariy, balki amaliy masalalarni yechishda ham hal qiluvchi vosita sifatida ishlatiladi.

Xos sonlarning karraligi va ularning turlari. Xos sonlar bilan



ishlashda ularning **algebraik** va **geometrik karraligi** muhim ahamiyatga ega. Algebraik karralilik — xarakteristik tenglamada xos sonning necha marta ildiz sifatida qatnashishini bildiradi. Geometrik karralilik esa shu xos songa mos xos vektorlar fazosining o'lchami bilan aniqlanadi. Agar algebraik va geometrik karraliliklar teng bo'lsa, matritsa diagonal ko'rinishga keltirilishi mumkin. Aks holda, matritsa **nuqsonli (defective)** deb ataladi va bunday holatlarda Jordan normal shakliga o'tkazish masalasi yuzaga keladi. Bu tushuncha nazariy mexanika, differensial tenglamalar va avtomatik boshqaruv tizimlarida muhim hisoblanadi.

Simmetrik va musbat aniqlangan matritsalarining xos xossalari. Simmetrik matritsalar uchun xos sonlar va xos vektorlar maxsus xususiyatlarga ega. Agar ($A = A^T$) bo'lsa, u holda barcha xos sonlar haqiqiy bo'ladi, turli xos sonlarga mos xos vektorlar o'zaro ortogonal bo'ladi. Agar simmetrik matritsa musbat aniqlangan bo'lsa, uning barcha xos sonlari musbat bo'ladi. Bu xossa optimallashtirish masalalarida, kvadratik formalarni tahlil qilishda va energiya minimallashtirish modellarida keng qo'llaniladi.

Diagonalizatsiya va spektral ajratish. Matritsani diagonal ko'rinishga keltirish masalasi xos son va xos vektorlar bilan bevosita bog'liq. Agar matritsa yetarlicha mustaqil xos vektorlarga ega bo'lsa, u quyidagi ko'rinishda ifodalanadi:

$$[A] = [PDP^{-1}]$$

bu yerda (D) — diagonal matritsa, (P) — xos vektorlardan tuzilgan matritsa.

Spektral ajratish matritsa darajalarini hisoblash, differensial tenglamalar sistemalarini yechish va diskret dinamik modellarni tahlil qilishda hisoblashni sezilarli darajada soddalashtiradi.

Sonli barqarorlik va hisoblash xatoliklari. Xos sonlarni sonli hisoblash jarayonida **yaqinlashish tezligi** va **xatoliklar** muhim rol o'ynaydi. Ba'zi algoritmlar aniq natija bersa-da, kompyuter arifmetikasi tufayli xatoliklar yuzaga kelishi mumkin. Ayniqsa, o'zaro juda yaqin xos sonlarga ega matritsalar uchun bu muammo kuchliroq namoyon bo'ladi. Shu sababli amaliy hisoblashlarda shartlanganlik (condition number) tushunchasi kiritiladi. Yaxshi shartlangan matritsalar uchun hisoblash barqaror bo'lsa, yomon shartlangan matritsalar maxsus algoritmik yondashuvlarni talab qiladi.

Xos sonlarning dinamik tizimlardagi roli. Diskret va uzluksiz dinamik tizimlarda xos sonlar tizimning vaqt bo'yicha xatti-harakatini belgilaydi. Agar barcha xos sonlarning moduli 1 dan kichik bo'lsa, tizim barqaror hisoblanadi. Aksincha, kamida bitta xos sonning moduli 1 dan katta bo'lsa, tizim beqaror bo'ladi. Bu yondashuv iqtisodiy o'sish modellarida, aholi dinamikasida va avtomatik boshqaruv tizimlarini loyihalashda keng qo'llaniladi.

Dasturiy muhitlarda xos sonlarni hisoblash. Zamonaviy hisoblash muhitlari xos son va xos vektorlarni



topish uchun tayyor funksiyalarni taqdim etadi:

- ✓ MATLAB'da eig() funksiyasi;
- ✓ Python (NumPy) muhitida numpy.linalg.eig();
- ✓ MathCAD va Mathematica tizimlari.

Ushbu vositalar katta o'lchamli matritsalar bilan ishlashda vaqt va hisoblash resurslarini tejash imkonini beradi, biroq foydalanuvchi natijalarning matematik mazmunini to'g'ri talqin qila olishi zarur.

Kompleks xos sonlar va ularning talqini. Haqiqiy elementlardan iborat bo'lgan ba'zi matritsalar ham kompleks xos sonlarga ega bo'lishi mumkin. Bunday xos sonlar juft-juft bo'lib, kompleks qo'shma ko'rinishda paydo bo'ladi. Kompleks xos sonlarning haqiqiy qismi tizimning o'sish yoki so'nish tezligini, mavhum qismi esa tebranish chastotasini ifodalaydi. Bu holat ayniqsa mexanik tebranishlar, elektr zanjirlari va boshqaruv tizimlarida tizim xatti-harakatini tushuntirishda muhim ahamiyatga ega.

Jordan normal shakli va umumlashgan xos vektorlar. Agar matritsa yetarli miqdorda chiziqli mustaqil xos vektorlarga ega bo'lmasa, uni diagonalizatsiya qilib bo'lmaydi. Bunday hollarda **Jordan normal shakli** tushunchasi qo'llaniladi. Jordan shaklida matritsa diagonalga yaqin bo'lib, diagonal bo'ylab xos sonlar, yuqori diagonallarda esa birlik elementlar joylashadi. Bu shakl differensial tenglamalar sistemalarini yechishda va

nazariy tadqiqotlarda muhim vosita hisoblanadi.

Spektral radius va uning ahamiyati. Matritsaning spektral radiusi eng katta modulga ega bo'lgan xos son bilan aniqlanadi. U iteratsion jarayonlarning yaqinlashuv shartlarini baholashda muhim ko'rsatkich hisoblanadi. Agar spektral radius 1 dan kichik bo'lsa, ko'plab iteratsion algoritmlar yaqinlashuvchi bo'ladi. Aksincha, spektral radius 1 dan katta bo'lsa, iteratsiyalar beqaror bo'lishi mumkin.

Xos sonlar orqali matritsa funksiyalarini hisoblash. Matritsa funksiyalari (eksponenta, logarifm, sinus va kosinus) xos son va xos vektorlar yordamida aniqlanadi. Ayniqsa, matritsa eksponentasi $[e^{At}]$ differensial tenglamalar sistemasining aniq yechimini topishda asosiy rol o'ynaydi. Agar matritsa diagonalizatsiya qilinadigan bo'lsa, matritsa funksiyalarini hisoblash sezilarli darajada soddalashadi.

Xos sonlarning grafik talqini. Xos sonlarni kompleks tekislikda joylashtirish orqali tizimning barqarorlik xususiyatlarini vizual tahlil qilish mumkin. Bu yondashuv Nyquist va faza tekisligi tahlillarida keng qo'llaniladi.

Grafik talqin murakkab matematik tushunchalarni intuitiv tushunishga yordam beradi, ayniqsa ta'lim jarayonida samarali hisoblanadi.

Amaliy muammolarda xos sonlar orqali optimallashtirish. Optimallashtirish masalalarida xos sonlar Hessian matritsasi orqali ekstremum



nuqtalarning turini aniqlashda qo'llaniladi. Agar barcha xos sonlar musbat bo'lsa, minimum, manfiy bo'lsa — maksimum aniqlanadi. Bu yondashuv iqtisodiy rejalashtirish, resurslarni taqsimlash va mashinali o'rganish algoritmlarida keng qo'llaniladi.

Ta'lim jarayonida xos son va xos vektorlarni o'qitish metodikasi. Xos son va xos vektorlar mavzusi talabalar uchun murakkab bo'lishi mumkin. Shu sababli uni bosqichma-bosqich, geometrik talqinlar va amaliy misollar bilan tushuntirish samarali hisoblanadi. Dasturiy vositalardan foydalanish talabalarni mustaqil tadqiqotga undaydi va ularning algoritmik tafakkurini rivojlantiradi.

XULOSA

Matritsaning xos son va xos vektorlarini aniqlash masalasi chiziqli algebra nazariyasining muhim yo'nalishlaridan biri bo'lib, u ko'plab amaliy va nazariy masalalarni yechishda asosiy vosita sifatida xizmat qiladi. Ushbu tushunchalar yordamida chiziqli o'zgartirishlarning ichki tuzilishi, ularning fazodagi xatti-harakati hamda tizimlarning barqarorlik xususiyatlari chuqur tahlil qilinadi. Maqolada xos son va xos vektorlarning matematik mazmuni, ularni aniqlashning klassik determinantga asoslangan usullari, shuningdek, katta o'lchamli matritsalar

uchun mo'ljallangan iteratsion va algoritmik yondashuvlar keng yoritildi. Daraja usuli, invers daraja usuli va QR-algoritm kabi metodlarning mohiyati ochib berilib, ularning afzallik va cheklovlari ilmiy asosda tahlil qilindi. Shu bilan birga, xos sonlarning karraligi, spektral radius, diagonalizatsiya va Jordan normal shakli kabi tushunchalar orqali mavzuning nazariy chuqurligi yanada kengaytirildi.

Xos son va xos vektorlarning amaliy ahamiyati differensial tenglamalar sistemalari, dinamik va boshqaruv tizimlari, mexanik va elektr modellar, iqtisodiy tahlil hamda sun'iy intellekt sohalaridagi qo'llanilish misollarida yaqqol namoyon bo'ldi. Ayniqsa, zamonaviy dasturiy muhitlar yordamida ushbu tushunchalarni samarali hisoblash imkoniyati mavjudligi ularning real masalalardagi ahamiyatini yanada oshiradi.

Xulosa qilib aytganda, matritsaning xos son va xos vektorlarini topish metodlari va algoritmlarini chuqur o'rganish talabalarning matematik tafakkurini rivojlantirish, ularning nazariy bilimlarini amaliy ko'nikmalar bilan uyg'unlashtirishga xizmat qiladi. Ushbu bilimlar zamonaviy fan va texnologiyalar taraqqiyoti sharoitida muhim ilmiy va amaliy ahamiyat kasb etadi.



FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

1. Axmedov S., Chiziqli algebra, O'qituvchi nashriyoti, Toshkent, 2018, 320 bet.
2. Qodirov A., Oliy matematika. Chiziqli algebra va analitik geometriya, Fan va texnologiya nashriyoti, Toshkent, 2019, 360 bet.
3. Karimov B., Matritsalar va ularning qo'llanilishi, Universitet nashriyoti, Toshkent, 2020, 240 bet.
4. Anton H., Rorres C., Elementary Linear Algebra, Wiley, New York, 2014, 560 bet.
5. Strang G., Linear Algebra and Its Applications, Cengage Learning, Boston, 2016, 600 bet.
6. Lay D., Lay S., McDonald J., Linear Algebra and Its Applications, Pearson Education, London, 2015, 512 bet.
7. Golub G., Van Loan C., Matrix Computations, Johns Hopkins University Press, Baltimore, 2013, 784 bet.
8. Meyer C., Matrix Analysis and Applied Linear Algebra, SIAM, Philadelphia, 2000, 718 bet.